

8月1日首讲 · 题目驱动课程

信号与系统

学生讲义

信号表示、周期与能量功率：六类题的稳定入口

日期	成片	方法卡	版本
2026-08-01	130 分钟	6	v1.0

本讲主线：每道题都按：母题 -> 触发词 -> 可直接使用的结论 -> 条件检查 -> 完整解题 -> 失效反例。

学完必须做到

- 先确认复数、连续信号或离散序列，再选择相位、位置、频率或平均量的工具。
- 能从非零样值写出单位样值展开，能用关键点方程处理 $x(at+b)$ 。
- 能按整数周期、定义域对称性和单周期平均准确分类。

一页方法总图

统一解题链：先识别题干触发词，再检查成立条件；条件完整才调用结论，最后必须用反例验证边界。

序号	方法	看到什么就启动
1	复数相位必须结合象限归一化	直角坐标转极坐标；复指数幅相表示
2	离散序列按非零样值展开成单位样值之和	把序列写成单位脉冲形式；从杆状图读表达式
3	时标变换用关键点方程反求新位置	画 $x(at+b)$ ；求新信号非零区间
4	离散正弦周期性的判据是归一化频率为有理数	离散正弦或复指数；判断周期并求基波周期
5	任意信号唯一分解为偶部与奇部	求奇偶分量；利用对称性简化积分或 Fourier 级数
6	非零周期信号通常是功率信号而不是能量信号	周期信号能量功率分类；正弦、方波或周期序列

对象与横轴 -> 关键点/频率/对称性 -> 条件检查 -> 表示、作图或分类 -> 反例回查

方法卡 01 | 复数相位必须结合象限归一化

母题：把 $z=-1-j\sqrt{3}$ 写成主值相位位于 $(-\pi,\pi]$ 的极坐标形式。

1. 题干触发词

- 直角坐标转极坐标
- 复指数幅相表示
- 频率响应相位或极点角度

2. 可直接使用的二级结论

结论：对 $z=x+jy$ ，模长由 $\sqrt{x^2+y^2}$ 给出，相位必须结合点 (x,y) 的象限判断。单独使用 $\arctan(y/x)$ 会丢失相隔 π 的方向信息。

为什么成立： $x=r\cos(\theta)$ 、 $y=r\sin(\theta)$ 。正切只给斜率，不能区分相隔 π 的两个方向。

3. 使用前的条件检查

- z 不等于 0
- 明确主值相位区间，例如 $(-\pi,\pi]$

第一动作：先算模长，再画点或用 $\text{atan2}(y,x)$ 判象限，最后把相位加减 2π 归一化到题目要求区间。

4. 完整解题

1. 模长 $r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ 。
2. 点 $(-1,-\sqrt{3})$ 位于第三象限；参考角为 $\pi/3$ 。
3. 第三象限方向可写 $4\pi/3$ ；归一化到 $(-\pi,\pi]$ 后为 $-2\pi/3$ 。
4. 所以 $z=2e^{-j2\pi/3}$ 。用 Euler 公式回代可恢复 $-1-j\sqrt{3}$ 。

答案： $2e^{-j2\pi/3}$

5. 失效反例

反例题：为什么 $z=-1-j$ 不能只写 $\arctan[(-1)/(-1)]=\pi/4$?

反例结论：比值只给出斜率 1。点实际在第三象限，主值相位为 $-3\pi/4$ ，而 $\pi/4$ 位于第一象限。

全程保留板书：模长 $\rightarrow$ 象限 $\rightarrow$ 参考角 $\rightarrow$ 主值归一化 $\rightarrow$ 回代。

方法卡 02 | 离散序列按非零样值展开成单位样值之和

母题：已知 $x[-1]=2$, $x[0]=-1$, $x[2]=3$, 其余为 0, 写出 $x[n]$ 。

1. 题干触发词

- 把序列写成单位脉冲形式
- 从杆状图读表达式
- 为离散卷积建立输入分解

2. 可直接使用的二级结论

结论：任意离散序列满足 $x[n]=\sum_k x[k] \delta[n-k]$ 。有限长序列只需把每个非零位置写成一个移位单位样值。

为什么成立：固定 n 后，求和中只有 $k=n$ 的一项非零，因此右端恰好等于 $x[n]$ 。

3. 使用前的条件检查

- $\delta[0]=1$, 其余位置为 0
- 下标平移方向正确

第一动作：逐点读取非零样值。位置 k 写 $\delta[n-k]$, 前面的系数就是 $x[k]$ 。

4. 完整解题

1. 位置 -1 对应 $\delta[n-(-1)]=\delta[n+1]$, 系数为 2。
2. 位置 0 对应 $\delta[n]$, 系数为 -1。
3. 位置 2 对应 $\delta[n-2]$, 系数为 3。
4. 合并得 $x[n]=2\delta[n+1]-\delta[n]+3\delta[n-2]$, 逐点代入检查三个非零位置。

答案： $2\delta[n+1]-\delta[n]+3\delta[n-2]$

5. 失效反例

反例题： $2\delta[n-1]$ 的非零位置在哪里？ $\delta[n+1]$ 又在哪里？

反例结论： $2\delta[n-1]$ 在 $n=1$ 处非零且幅度为 2； $\delta[n+1]$ 在 $n=-1$ 处非零。括号内令零即可判位置。

全程保留板书：位置 $k \rightarrow \delta[n-k]$ ；负位置会在括号里变成加号。

方法卡 03 | 时标变换用关键点方程反求新位置

母题：若 $x(t)$ 只在 $0 < t < 2$ 非零，求 $x(2t-1)$ 的非零区间。

1. 题干触发词

- 画 $x(at+b)$
- 求新信号非零区间
- 平移、反转与尺度同时出现

2. 可直接使用的二级结论

结论：处理 $x(at+b)$ 时，原信号关键点 t_0 在新图上的位置由 $at+b=t_0$ 决定。 $a < 0$ 同时产生反转，普通波形的纵向幅度不因时标变换而改变。

为什么成立：当 $at+b=t_0$ 时，新信号读取原信号在 t_0 的值，所以每个关键点的位置都可由一次方程直接反解。

3. 使用前的条件检查

- 已标出原信号端点、断点和峰值位置
- a 不等于 0

第一动作：逐个解 $t=(t_0-b)/a$ ，把新位置从小到大排序后连图；再用 a 的符号检查是否反转。

4. 完整解题

1. 要求复合自变量落入原支撑区间： $0 < 2t-1 < 2$ 。
2. 两端同时求解，得到 $1/2 < t < 3/2$ 。
3. $a=2 > 0$ ，不反转；区间长度从 2 变为 1，说明时间轴压缩 2 倍。
4. 普通波形的幅度保持不变，只改变横向位置与宽度。

答案： $1/2 < t < 3/2$

5. 失效反例

反例题： $x(2t)$ 与 $\delta(2t)$ 的幅度是否都保持不变？

反例结论：不是。普通 $x(2t)$ 只压缩时间轴；连续冲激满足 $\delta(2t) = \delta(t)/2$ ，必须补 $1/|2|$ 的尺度因子。

全程保留板书：关键点 $t_0 \rightarrow$ 解 $at+b=t_0$ ；普通波形不改幅度，冲激另算尺度。

方法卡 04 | 离散正弦周期性的判据是归一化频率为有理数

母题：判断 $x[n]=\cos(0.2\pi n)$ 是否周期，并求基波周期。

1. 题干触发词

- 离散正弦或复指数
- 判断周期并求基波周期
- 多个离散频率叠加

2. 可直接使用的二级结论

结论： $x[n]=\cos(\Omega_0 n + \phi)$ 周期，当且仅当 $\Omega_0/(2\pi)$ 为有理数。基波周期是使 $\Omega_0 N = 2\pi k$ 成立的最小正整数 N 。

为什么成立： 周期要求相位增量 $\Omega_0 N$ 是 2π 的整数倍，即 $\Omega_0/(2\pi)=k/N$ 。

3. 使用前的条件检查

- N 与 k 都必须是整数
- 多分量时最终取各分量周期的最小公倍数

第一动作： 把 $\Omega_0/(2\pi)$ 约成最简分数 p/q ；复指数基波周期取 q ，再检查正弦余弦的常值或退化情形。

4. 完整解题

1. 归一化频率 $\Omega_0/(2\pi)=0.2\pi/(2\pi)=1/10$ ，是有理数。
2. 令 $\Omega_0 N=2\pi k$ ，得到 $N=10k$ 。
3. 最小正整数解取 $k=1$ 、 $N=10$ 。
4. 回代 $x[n+10]=\cos(0.2\pi n+2\pi)=x[n]$ ，且不存在更小正周期。

答案：周期，基波周期 $N_0=10$

5. 失效反例

反例题： $x[n]=\cos(\sqrt{2}n)$ 是否周期？

反例结论： 不周期，因为 $\sqrt{2}/(2\pi)$ 不是有理数，无法找到正整数 N 、 k 使 $\sqrt{2}N=2\pi k$ 。

全程保留板书： 连续正弦必周期；离散正弦先查 $\Omega/(2\pi)$ 是否为有理数。

方法卡 05 | 任意信号唯一分解为偶部与奇部

母题：求 $x(t)=e^{(-t)}u(t)$ 的偶部与奇部。

1. 题干触发词

- 求奇偶分量
- 利用对称性简化积分或 Fourier 级数
- 出现 $x(t)$ 与 $x(-t)$

2. 可直接使用的二级结论

结论： $x_e(t)=[x(t)+x(-t)]/2$, $x_o(t)=[x(t)-x(-t)]/2$, 且 $x=x_e+x_o$ 。离散时间将 t 换成 n 同样成立。

为什么成立：半和与半差相加恢复 x ；把 t 换成 $-t$ 可直接验证一项为偶、一项为奇，因此分解唯一。

3. 使用前的条件检查

- $x(t)$ 与 $x(-t)$ 在讨论的定义域内均有意义
- 若定义域不关于原点对称，先说明延拓或限制

第一动作：先写 $x(-t)$ ，再做半和与半差；最后分别检查 $x_e(-t)=x_e(t)$ 、 $x_o(-t)=-x_o(t)$ 。

4. 完整解题

1. 先反转： $x(-t)=e^t u(-t)$ 。
2. 偶部 $x_e(t)=[e^{(-t)}u(t)+e^t u(-t)]/2$ 。
3. 奇部 $x_o(t)=[e^{(-t)}u(t)-e^t u(-t)]/2$ 。
4. 相加恢复原信号，并代入 $-t$ 检查偶、奇定义。

答案： $x_e=[e^{(-t)}u(t)+e^t u(-t)]/2$ ； $x_o=[e^{(-t)}u(t)-e^t u(-t)]/2$

5. 失效反例

反例题：只在 $0 < t < 1$ 上定义的函数，能否不作说明就称为奇函数？

反例结论：不能。定义域不关于原点对称，负半轴没有对应值；必须先给出延拓或限定新的对称定义域。

全程保留板书：先反转，再半和半差；奇偶性要求定义域关于原点对称。

方法卡 06 | 非零周期信号通常是功率信号而不是能量信号

母题：求 $x(t)=A \cos(\omega_0 t+\phi)$ 的总能量与平均功率，其中 $A \neq 0$ 、 $\omega_0 \neq 0$ 。

1. 题干触发词

- 周期信号能量功率分类
- 正弦、方波或周期序列
- 要求平均功率

2. 可直接使用的二级结论

结论：非零周期信号若一个周期内平方可积或平方可和，则总能量为无穷，平均功率等于任一完整周期内的平均平方值。

为什么成立：每个周期贡献相同的正能量，无限多个周期使总能量发散；在长时间平均中，边缘不足一个周期的影响消失，只剩单周期平均。

3. 使用前的条件检查

- 信号非零并稳定周期重复
- 一个周期内的平方积分或求和有限

第一动作：截取任一完整周期计算平均平方，不做无限区间硬积分；再由无限个周期贡献相同正能量说明 $E=\infty$ 。

4. 完整解题

1. 信号非零且周期为 $T_0=2\pi/|\omega_0|$ 。
2. 单周期平均功率 $P=(1/T_0) \int_{T_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t+\phi) dt$ 。
3. $\cos^2$ 在任一完整周期内的平均值为 $1/2$ ，因此 $P=A^2/2$ 。

4. 每周期能量为 $P T_0 > 0$, 无限重复使 $E = \text{infinity}$ 。

答案: $E = \text{infinity}$, $P = A^2/2$

5. 失效反例

反例题: 某信号总能量为无穷, 能否直接断言它是功率信号?

反例结论: 不能。指数增长信号的长时间平均功率也会发散, 它既不是能量信号, 也不是有限功率信号。零信号还需单独说明 $E = P = 0$ 。

全程保留板书: 周期非零 $\rightarrow$ 单周期平均求 P ; $E = \text{infinity}$ 。能量无穷不等于功率有限。

课堂出口题与课后练习

1. 把 $z = -\sqrt{3} + j$ 写成主值相位位于 $(-\pi, \pi]$ 的极坐标形式。
2. 已知 $x[-2] = -1$ 、 $x[1] = 2$ 、 $x[3] = 1/2$ ，其余为 0，写成单位样值之和。
3. 若 $x(t)$ 只在 $-1 < t < 2$ 非零，求 $x(1-2t)$ 的非零区间，并判断是否反转。
4. 判断 $x[n] = \cos(3\pi n/5)$ 是否周期，并求基波周期。
5. 求 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 的偶部和奇部，并完成奇偶性检查。
6. 幅度为 2、占空比为 $1/4$ 的周期矩形脉冲，求平均功率。

提交要求：每题必须写触发词、条件检查、第一动作和结果自检；只写最终答案不计为完成。

课堂出口题与课后练习

1. 把 $z = -\sqrt{3} + j$ 写成主值相位位于 $(-\pi, \pi]$ 的极坐标形式。
2. 已知 $x[-2] = -1$ 、 $x[1] = 2$ 、 $x[3] = 1/2$ ，其余为 0，写成单位样值之和。
3. 若 $x(t)$ 只在 $-1 < t < 2$ 非零，求 $x(1-2t)$ 的非零区间，并判断是否反转。
4. 判断 $x[n] = \cos(3\pi n/5)$ 是否周期，并求基波周期。
5. 求 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 的偶部和奇部，并完成奇偶性检查。
6. 幅度为 2、占空比为 $1/4$ 的周期矩形脉冲，求平均功率。

答案与检查点

1. 模长 2，点在第二象限，主值相位 $5\pi/6$ ，所以 $z = 2e^{j5\pi/6}$ 。
2. $x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n-1] + (1/2)\delta[n-3]$ 。
3. 解 $-1 < 1-2t < 2$ 得 $-1/2 < t < 1$ ；系数 $-2 < 0$ ，图像反转并压缩 2 倍。
4. $\Omega/(2\pi) = 3/10$ ，周期，基波周期 $N_0 = 10$ 。
5. $x_e = [e^{-t}u(t) + e^t u(-t)]/2$ ； $x_o = [e^{-t}u(t) - e^t u(-t)]/2$ 。
6. $P = A^2 D = 4 \cdot (1/4) = 1$ ；总能量为无穷。

资料来源

- [legacy/ipad_site/lecture_notes/07_830 信号与系统零基础教案合并版.md](#)（信号表示、周期、能量功率）
- [platform/src/data/problem-method-catalog.json](#)（复数与序列方法卡）
- [platform/src/data/generated/secondary-conclusions.json](#)（6 张结构完整卡）
- [output/teacher-course/2026-08-01-首讲备课包.md](#)（当天授课节奏）