

8月1日首讲·题目驱动课程

数学一

学生讲义

极限与递推数列：方法判断、条件与完整解题

日期	成片	方法卡	版本
2026-08-01	100 分钟	3	v1.0

本讲主线：每道题都按：母题 -> 触发词 -> 可直接使用的结论 -> 条件检查 -> 完整解题 -> 失效反例。

学完必须做到

- 看到 $0/0$ 时先判断乘除还是加减抵消，不把未定式等同于某一种固定方法。
- 能判断 Taylor 至少展开到哪一阶，并检查余项精度。
- 递推数列先证明收敛，再使用固定点方程确定极限。

一页方法总图

统一解题链：先识别题干触发词，再检查成立条件；条件完整才调用结论，最后必须用反例验证边界。

序号	方法	看到什么就启动
1	等价无穷小只在乘除主结构中优先替换	0/0 型极限；式子可整理成若干乘除因子
2	Taylor 展开必须保留到首个不抵消项	分子或分母含多个加减项；含参数并要求极限存在或等于常数
3	递推式取极限之前先证明收敛	$a_{n+1}=f(a_n)$ ；要求递推数列极限

0/0 -> 先判结构：乘除可试等价；加减/消项用 Taylor；递推先证收敛再取极限

方法卡 01 | 等价无穷小只在乘除主结构中优先替换

母题：计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x)/(e^{2x}-1)$ 。

1. 题干触发词

- 0/0 型极限
- 式子可整理成若干乘除因子
- 出现 $\sin x$ 、 e^x-1 、 $\ln(1+x)$ 等标准小量

2. 可直接使用的二级结论

结论：同一趋近过程中，有限个等价无穷小的乘积或商仍可整体替换；加减式可能发生主项抵消，必须先合并或改用 Taylor 展开。

为什么成立：若 $f(x) \sim g(x)$ ，则 $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ 。有限个比值相乘或相除仍趋于 1；但 $f-g$ 的首项可能恰好相消，等价关系本身不控制高阶余项。

3. 使用前的条件检查

- 所有等价关系对应同一趋近点
- 分母在去心邻域内有意义
- 替换后不丢失需要考察的抵消阶数

第一动作：先识别整体结构。乘除结构逐因子替换；只要看到加减或参数消项，就暂停替换并比较展开阶数。

4. 完整解题

1. 直接代入得到 0/0，且分子、分母构成纯商，满足等价替换的结构条件。
2. 在 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin(3x) \sim 3x$ ， $e^{2x}-1 \sim 2x$ 。

3. 因此原式 $\sim 3x/(2x)=3/2$ 。
4. 回查：两个替换对象趋近点相同，分母在去心邻域内非零，未发生加减抵消。

答案： $3/2$

5. 失效反例

反例题：为什么不能在 $1-\cos x \sim x^2/2$ 中只用 $1-\cos x \sim x^2/2$ 后就结束？

反例结论：因为二阶主项完全抵消。展开 $1-\cos x = x^2/2 - x^4/24 + o(x^4)$ ，原式 $= -x^4/24 + o(x^4)$ 。

全程保留板书：乘除可换；加减先看抵消；趋近点必须一致。

方法卡 02 | Taylor 展开必须保留到首个不抵消项

母题：计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2$ 。

1. 题干触发词

- 分子或分母含多个加减项
- 含参数并要求极限存在或等于常数
- 使用常用等价后仍得到 $0/0$

2. 可直接使用的二级结论

结论：展开到哪一阶由合并后的第一个非零项决定。常用展开写得再熟，如果低阶系数尚未合并完，就不能停止。

为什么成立：Taylor 多项式按幂次排列。多个展开式相加减后，低阶系数可能逐项相消，因此极限的阶数与系数由合并后的首个非零项决定。

3. 使用前的条件检查

- 函数在展开点具有所需阶数的导数或存在合法展开
- 各项使用一致的余项精度
- 余项阶数严格高于最终保留项

第一动作：先预判可能抵消的最低阶，再把所有相关项统一展开；逐阶合并系数，看到第一个非零合并项后才停止。

4. 完整解题

1. 分子是加减结构，且常数项和一次项已经显式相消，不能只用 $e^x - 1 \sim x$ 。
2. 统一展开到二阶： $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ 。

3. 分子 $e^x - 1 - x = x^2/2 + o(x^2)$ 。
4. 除以 x^2 后得到 $1/2 + o(1)$, 故极限为 $1/2$ 。

答案: $1/2$

5. 失效反例

反例题: 能否在 $x=0$ 附近把 $|x|$ 写成一个普通 Taylor 多项式, 再求双侧展开?

反例结论: 不能。 $|x|$ 在 0 处不可导, 左右一阶行为不同; 必须分 $x>0$ 与 $x<0$ 讨论。

全程保留板书: 先判抵消阶数; 统一精度; 首个非零项出现才停。

方法卡 03 | 递推式取极限之前先证明收敛

母题：设 $a_1=1$, $a_{(n+1)}=\sqrt{2+a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

1. 题干触发词

- $a_{(n+1)}=f(a_n)$
- 要求递推数列极限
- 固定点方程出现多个根

2. 可直接使用的二级结论

结论：固定点方程 $A=f(A)$ 只能给出可能的极限。只有先证明数列收敛，并确认 f 在候选点可以传递极限，才能用方程确定极限。

为什么成立：若 $a_n \rightarrow A$ 且 f 在 A 连续，则 $a_{(n+1)}=f(a_n) \rightarrow f(A)$ 。移位后的收敛数列极限仍为 A ，因此 $A=f(A)$ 。

3. 使用前的条件检查

- 已经证明数列收敛
- f 在候选极限处连续或具有保极限性质
- 候选根落在已证明的不变区间内

第一动作：先用归纳法建立不变区间，再证单调或压缩；确认收敛后令 $n \rightarrow \infty$ ，最后用区间排除多余固定点。

4. 完整解题

1. 猜候选：若极限存在，则 $A=\sqrt{2+A}$ ，解得 $A=2$ 或 $A=-1$ ；由根号值非负，保留 $A=2$ 。
2. 证不变区间： $a_1=1$ 。若 $1 \leq a_n < 2$ ，则 $1 < \sqrt{2+a_n} < 2$ ，故 $1 \leq a_{(n+1)} < 2$ 。

3. 证单调：在 $1 \leq a_n < 2$ 时， $a_{n+1} > a_n$ 等价于 $2 + a_n > a_n^2$ ，即 $(2 - a_n)(a_n + 1) > 0$ 。
4. 因此数列单调递增且以 2 为上界，必收敛。再代入固定点方程，极限为 2。

答案：2

5. 失效反例

反例题：递推 $a_{n+1} = 1 - a_n$ 的固定点为 $1/2$ 。取 $a_1 = 0$ 时，数列是否趋于 $1/2$ ？

反例结论：不趋于。数列为 $0, 1, 0, 1, \dots$ ，在两个值之间振荡。固定点方程只给候选，不能替代收敛证明。

全程保留板书：候选值不等于极限：不变区间 $\rightarrow$ 单调/压缩 $\rightarrow$ 收敛 $\rightarrow$ 固定点。

课堂出口题与课后练习

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(5x)/\ln(1+2x)$ 。写出可使用等价无穷小的结构条件。
2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - x)/x^3$ 。说明必须展开到三阶的原因。
3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x - x^2/2)/x^3$ 。
4. 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ 。证明收敛并求极限。
5. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=1/a_n$ 。固定点候选为 1, 判断数列是否收敛。

提交要求：每题必须写触发词、条件检查、第一动作和结果自检；只写最终答案不计为完成。

课堂出口题与课后练习

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(5x)/\ln(1+2x)$ 。写出可使用等价无穷小的结构条件。
2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - x)/x^3$ 。说明必须展开到三阶的原因。
3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x - x^2/2)/x^3$ 。
4. 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ 。证明收敛并求极限。
5. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=1/a_n$ 。固定点候选为 1, 判断数列是否收敛。

答案与检查点

1. $5/2$ 。原式为纯商, $\sin(5x) \sim 5x$ 、 $\ln(1+2x) \sim 2x$ 。
2. $1/3$ 。 $\tan x = x + x^3/3 + o(x^3)$, 一次项相消后首个非零项为三次项。
3. $1/6$ 。 e^x 统一展开到三阶, 余项取 $o(x^3)$ 。
4. 极限 $\alpha = (1 + \sqrt{13})/2$ 。用 $[1, \alpha)$ 为不变区间, 并证在此区间 $a_{n+1} > a_n$ 。
5. 不收敛。数列在 2 与 $1/2$ 之间交替, 固定点方程不能替代收敛证明。

资料来源

- legacy/ipad_site/lecture_notes/03_数学一逐章逐节完整讲义.md (函数、极限与连续)
- platform/src/data/generated/secondary-conclusions.json (3 张结构完整卡)
- output/teacher-course/2026-08-01-首讲备课包.md (当天授课节奏)