

信号与系统

表示、变换、周期与能量功率

母题 → 触发词 → 二级结论 → 条件检查 → 完整解题 → 失效反例

130 分钟 · 6 个方法 · 课堂材料（发布前请教师终审）

开场诊断 | 只写第一动作

- 01 把 $z = -1 - j\sqrt{3}$ 写成主值相位位于 $(-\pi, \pi]$ 的极坐标形式。
- 02 已知 $x[-1]=2$, $x[0]=-1$, $x[2]=3$, 其余为 0, 写出 $x[n]$ 。
- 03 若 $x(t)$ 只在 $0 < t < 2$ 非零, 求 $x(2t-1)$ 的非零区间。
- 04 判断 $x[n] = \cos(0.2\pi n)$ 是否周期, 并求基波周期。
- 05 求 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 的偶部与奇部。
- 06 求 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 的总能量与平均功率, $A \neq 0$ 、 $\omega_0 \neq 0$ 。

六类题，三组入口

识别结构 → 检查条件 → 调用结论 → 失效自检

表示

01 复数幅相

入口：直角坐标转极坐标

02 单位样值展开

入口：写成单位脉冲形式

变换与周期

01 时标变换

入口：画 $x(at+b)$

02 离散正弦周期

入口：离散正弦或复指数

性质

01 奇偶分解

入口：求奇偶分量

02 周期信号功率

入口：周期信号能量功率分类

母题 | 复数相位必须结合象限归一化

母题

把 $z = -1 - j\sqrt{3}$ 写成主值相位位于 $(-\pi, \pi]$ 的极坐标形式。

题干触发词

- 直角坐标转极坐标
- 复指数幅相表示
- 频率响应相位或极点角度

可直接使用的结论

$z = x + jy$ 的模长为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ ；相位必须结合 (x, y) 的象限。只用 $\arctan(y/x)$ 会丢失相隔 π 的方向信息。

调用前必须检查

- $z \neq 0$
- 明确主值相位区间，如 $(-\pi, \pi]$

完整解题 | 复数幅相

答案: $2e^{-j2\pi/3}$

1

模长 $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 。

2

点 $(-1, -\sqrt{3})$ 位于第三象限，参考角为 $\pi/3$ 。

3

方向可写 $4\pi/3$ ；归一化到 $(-\pi, \pi]$ 后为 $-2\pi/3$ 。

4

$z = 2e^{-j2\pi/3}$ ；用 Euler 公式回代可恢复原复数。

失效边界 | 复数幅相

第一动作

先算模长，再画点或用 $\text{atan2}(y,x)$ 判象限，最后加减 2π 归一化到指定区间。

板书口令

模长 $\rightarrow$ 象限 $\rightarrow$ 参考角 $\rightarrow$ 主值归一化 $\rightarrow$ 回代。

失效反例

为什么 $z=-1-j$ 不能只写 $\arctan[(-1)/(-1)]=\pi/4$?

为什么失效

比值只给斜率 1。点在第三象限，主值相位为 $-3\pi/4$ ，而 $\pi/4$ 位于第一象限。

母题 | 离散序列按非零样值展开成单位样值之和

母题

已知 $x[-1]=2$, $x[0]=-1$, $x[2]=3$, 其余为 0, 写出 $x[n]$

。

题干触发词

- 写成单位脉冲形式
- 从杆状图读表达式
- 为离散卷积建立输入分解

可直接使用的结论

任意离散序列满足 $x[n]=\sum_k x[k]\delta[n-k]$ 。有限长序列只需把每个非零位置写成一个移位单位样值。

调用前必须检查

- $\delta[0]=1$, 其余位置为 0
- 下标平移方向正确

完整解题 | 单位样值展开

答案: $2\delta[n+1]-\delta[n]+3\delta[n-2]$

1

位置 -1 对应 $\delta[n+1]$, 系数为 2。

2

位置 0 对应 $\delta[n]$, 系数为 -1。

3

位置 2 对应 $\delta[n-2]$, 系数为 3。

4

$x[n]=2\delta[n+1]-\delta[n]+3\delta[n-2]$, 逐点代入检查。

失效边界 | 单位样值展开

第一动作

逐点读取非零样值。位置 k 写 $\delta[n-k]$ ，前面的系数就是 $x[k]$ 。

板书口令

位置 $k \rightarrow \delta[n-k]$ ；负位置在括号里变成加号。

失效反例

$2\delta[n-1]$ 的非零位置在哪里？ $\delta[n+1]$ 又在哪里？

为什么失效

$2\delta[n-1]$ 在 $n=1$ 处，幅度为 2； $\delta[n+1]$ 在 $n=-1$ 处。
令括号为零即可判断位置。

母题 | 时标变换用关键点方程反求新位置

母题

若 $x(t)$ 只在 $0 < t < 2$ 非零，求 $x(2t-1)$ 的非零区间。

题干触发词

- 画 $x(at+b)$
- 求新信号非零区间
- 平移、反转与尺度同时出现

可直接使用的结论

处理 $x(at+b)$ 时，原信号关键点 t_0 的新位置由 $at+b=t_0$ 决定。
。 $a < 0$ 还会反转；普通波形的纵向幅度不变。

调用前必须检查

- 已标出端点、断点和峰值
- $a \neq 0$

完整解题 | 时标变换

答案: $1/2 < t < 3/2$

1

令复合自变量落入原支撑区间: $0 < 2t-1 < 2$ 。

2

两端同时求解, 得到 $1/2 < t < 3/2$ 。

3

$a=2>0$, 不反转; 区间长度从 2 变为 1。

4

普通波形幅度不变, 只改变横向位置与宽度。

失效边界 | 时标变换

第一动作

逐个解 $t=(t_0-b)/a$ ，把新位置排序后连图；再用 a 的符号检查反转。

板书口令

关键点 $t_0 \rightarrow$ 解 $at+b=t_0$ ；普通波形不改幅度，冲激另算尺度。

失效反例

$x(2t)$ 与 $\delta(2t)$ 的幅度是否都保持不变？

为什么失效

不是。普通 $x(2t)$ 只压缩时间轴； $\delta(2t)=\delta(t)/2$ ，连续冲激必须补 $1/|2|$ 。

母题 | 离散正弦周期性的判据是归一化频率为有理数

母题

判断 $x[n] = \cos(0.2\pi n)$ 是否周期，并求基波周期。

题干触发词

- 离散正弦或复指数
- 判断周期并求基波周期
- 多个离散频率叠加

可直接使用的结论

$x[n] = \cos(\Omega_0 n + \varphi)$ 周期，当且仅当 $\Omega_0/(2\pi)$ 为有理数。基波周期是使 $\Omega_0 N = 2\pi k$ 成立的最小正整数 N 。

调用前必须检查

- N 与 k 都必须是整数
- 多分量取各周期的最小公倍数

完整解题 | 离散正弦周期

答案：周期，基波周期 $N_0=10$

1

$\Omega_0/(2\pi)=0.2\pi/(2\pi)=1/10$ ，是有理数。

2

令 $\Omega_0 N=2\pi k$ ，得到 $N=10k$ 。

3

最小正整数解取 $k=1$ 、 $N=10$ 。

4

回代 $x[n+10]=\cos(0.2\pi n+2\pi)=x[n]$ 。

失效边界 | 离散正弦周期

第一动作

把 $\Omega_0/(2\pi)$ 约成最简分数 p/q ；基波周期先取 q ，再检查常值或退化情形。

板书口令

连续正弦必周期；离散正弦先查 $\Omega/(2\pi)$ 是否为有理数。

失效反例

$x[n]=\cos(\sqrt{2} n)$ 是否周期？

为什么失效

不周期，因为 $\sqrt{2}/(2\pi)$ 不是有理数，找不到正整数 N 、 k 使 $\sqrt{2}N=2\pi k$ 。

母题 | 任意信号唯一分解为偶部与奇部

母题

求 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的偶部与奇部。

题干触发词

- 求奇偶分量
- 利用对称性简化积分或 Fourier 级数
- 出现 $x(t)$ 与 $x(-t)$

可直接使用的结论

$x_e(t)=[x(t)+x(-t)]/2$, $x_o(t)=[x(t)-x(-t)]/2$, 且 $x=x_e+x_o$; 离散时间同样成立。

调用前必须检查

- $x(t)$ 与 $x(-t)$ 均有意义
- 定义域关于原点对称, 或先说明延拓

完整解题 | 奇偶分解

答案： x_e 、 x_o 见步骤 2-3

1

先反转： $x(-t) = e^t u(-t)$ 。

2

$$x_e(t) = [e^{-t} u(t) + e^t u(-t)] / 2。$$

3

$$x_o(t) = [e^{-t} u(t) - e^t u(-t)] / 2。$$

4

相加恢复 $x(t)$ ，再代入 $-t$ 检查偶、奇定义。

失效边界 | 奇偶分解

第一动作

先写 $x(-t)$ ，再做半和与半差；最后分别检查偶、奇定义。

板书口令

先反转，再半和半差；奇偶性要求定义域关于原点对称。

失效反例

只在 $0 < t < 1$ 上定义的函数，能否不作说明就称为奇函数？

为什么失效

不能。定义域不关于原点对称；必须先给出延拓或限定新的对称定义域。

母题 | 非零周期信号通常是功率信号而不是能量信号

母题

求 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 的总能量与平均功率， $A \neq 0$ 、 $\omega_0 \neq 0$ 。

题干触发词

- 周期信号能量功率分类
- 正弦、方波或周期序列
- 要求平均功率

可直接使用的结论

非零周期信号若单周期内平方可积或可和，则总能量为无穷，平均功率等于任一完整周期内的平均平方值。

调用前必须检查

- 信号非零并稳定周期重复
- 单周期平方积分或求和有限

完整解题 | 周期信号功率

答案: $E=\infty$, $P=A^2/2$

1

信号非零且周期 $T_0=2\pi/|\omega_0|$ 。

2

$P=(1/T_0)\cdot\int[\text{任一周期}] A^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)dt。$

3

$\cos^2$ 的单周期平均值为 $1/2$ ，因此 $P=A^2/2$ 。

4

每周期能量 $PT_0>0$ ，无限重复使 $E=\infty$ 。

失效边界 | 周期信号功率

第一动作

截取任一完整周期计算平均平方；再由无限个周期贡献相同正能量说明 $E = \infty$ 。

板书口令

周期非零 $\rightarrow$ 单周期平均求 P ； $E = \infty$ 。能量无穷不等于功率有限。

失效反例

某信号总能量为无穷，能否直接断言它是功率信号？

为什么失效

不能。指数增长信号的平均功率也发散；它既不是能量信号，也不是有限功率信号。

开场诊断答案 | 先核入口，再核结果

01	复数幅相 $2e^{-j2\pi/3}$
02	单位样值展开 $2\delta[n+1]-\delta[n]+3\delta[n-2]$
03	时标变换 $1/2 < t < 3/2$
04	离散正弦周期 周期，基波周期 $N_0=10$
05	奇偶分解 $x_e=[e^{-t}u(t)+e^tu(-t)]/2$; $x_o=[e^{-t}u(t)-e^tu(-t)]/2$
06	周期信号功率 $E=\infty$, $P=A^2/2$

课后只交四行

触发词 + 条件检查

第一动作 + 结果自检

只写最终答案，不计为完成。