

8月1日首讲·题目驱动课程

数学一

教师逐字讲稿

极限渐近、Taylor 与递推数列：从题目触发方法

日期	成片	方法卡	版本
2026-08-01	100 分钟	3	v1.0

发布状态：结构完整、技术复核完成；数据库字段仍为 teacherApproved=false。录制或公开发布前，请教师在文末签字栏完成最终复核。

这份稿子怎么用

- 1. 录制时按页面顺序讲，不需要另写提纲；每个“逐字话术”可直接念，再用自己的语气微调。
- 2. 出现“母题”时先展示题目并暂停；继续播放后再揭示触发词与第一动作。
- 3. 每张方法卡必须讲完失效反例，避免学生把二级结论无条件套用。
- 4. 课后只按触发词、条件、步骤、边界四项批改，不把只报答案视为完成。

成片时间轴

时间	环节	必须完成的教学动作
0-8	开场诊断	三张暂停题卡，只收第一动作。
8-18	方法总图	区分乘除、加减抵消与递推存在性。
18-43	方法卡 1	等价无穷小的结构边界与四阶反例。
43-66	方法卡 2	Taylor 最小展开阶数与余项精度。
66-90	方法卡 3	递推不变区间、单调有界和振荡反例。
90-100	出口题	闭卷复述三条边界，布置同构题。

开场逐字稿

老师说：同学们好。今天不是从公式表开始，而是从三道题开始。你可以不会做完整计算，但必须先说出题目在触发什么方法。

老师说：第一题： $\sin(3x)/(e^{(2x)}-1)$ 在 x 趋近 0 时，第一动作是什么？请暂停 20 秒，只写方法和成立条件。

老师说：第二题： e^x-1-x 为什么不能只用 $e^x-1\sim x$ ？请写出你认为要展开到哪一阶。

老师说：第三题： $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 。解出 $A=\sqrt{2+A}$ 以后，为什么还不能宣布极限等于2？

老师说：今天全课只训练一件事：看到触发词以后，不急着套结论，先把结论成立的条件补齐。

一页方法总图

统一解题链：先识别题干触发词，再检查成立条件；条件完整才调用结论，最后必须用反例验证边界。

序号	方法	看到什么就启动
1	等价无穷小只在乘除主结构中优先替换	0/0 型极限；式子可整理成若干乘除因子
2	Taylor 展开必须保留到首个不抵消项	分子或分母含多个加减项；含参数并要求极限存在或等于常数
3	递推式取极限之前先证明收敛	$a_{n+1}=f(a_n)$ ；要求递推数列极限

0/0 -> 先判结构：乘除可试等价；加减/消项用 Taylor；递推先证收敛再取极限

方法卡 01 | 等价无穷小只在乘除主结构中优先替换

母题：计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x)/(e^{2x}-1)$ 。

1. 题干触发词

- 0/0 型极限
- 式子可整理成若干乘除因子
- 出现 $\sin x$ 、 e^x-1 、 $\ln(1+x)$ 等标准小量

逐字话术：同学们先不要背答案。看到 0/0 只说明需要变形，它还没有告诉我们一定用哪一种方法。

2. 可直接使用的二级结论

结论：同一趋近过程中，有限个等价无穷小的乘积或商仍可整体替换；加减式可能发生主项抵消，必须先合并或改用 Taylor 展开。

为什么成立：若 $f(x) \sim g(x)$ ，则 $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ 。有限个比值相乘或相除仍趋于 1；但 $f-g$ 的首项可能恰好相消，等价关系本身不控制高阶余项。

3. 使用前的条件检查

- 所有等价关系对应同一趋近点
- 分母在去心邻域内有意义
- 替换后不丢失需要考察的抵消阶数

第一动作：先识别整体结构。乘除结构逐因子替换；只要看到加减或参数消项，就暂停替换并比较展开阶数。

逐字话术：这里分子和分母是纯粹的商结构，所以等价无穷小是最短路线。请把‘纯商’两个字圈出来。

4. 完整解题

1. 直接代入得到 $0/0$ ，且分子、分母构成纯商，满足等价替换的结构条件。
2. 在 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin(3x) \sim 3x$ ， $e^{(2x)} - 1 \sim 2x$ 。
3. 因此原式 $\sim 3x/(2x) = 3/2$ 。
4. 回查：两个替换对象趋近点相同，分母在去心邻域内非零，未发生加减抵消。

答案： $3/2$

5. 失效反例

反例题：为什么不能在 $1 - \cos x - x^2/2$ 中只用 $1 - \cos x \sim x^2/2$ 后就结束？

反例结论：因为二阶主项完全抵消。展开 $1 - \cos x = x^2/2 - x^4/24 + o(x^4)$ ，原式 $= -x^4/24 + o(x^4)$ 。

逐字话术：如果题目改成两个等价量相减，今天的口令立刻失效，因为相减后的答案往往藏在下一阶段。

全程保留板书：乘除可换；加减先看抵消；趋近点必须一致。

题卡状态： `math.limit-equivalent-product-boundary | ready-for-teacher-review | teacherApproved=false`

方法卡 02 | Taylor 展开必须保留到首个不抵消项

母题：计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2$ 。

1. 题干触发词

- 分子或分母含多个加减项
- 含参数并要求极限存在或等于常数
- 使用常用等价后仍得到 $0/0$

逐字话术：这道题真正考的不是背出 e^x 的展开，而是判断要写到哪一项。

2. 可直接使用的二级结论

结论：展开到哪一阶由合并后的第一个非零项决定。常用展开写得再熟，如果低阶系数尚未合并完，就不能停止。

为什么成立：Taylor 多项式按幂次排列。多个展开式相加减后，低阶系数可能逐项相消，因此极限的阶数与系数由合并后的首个非零项决定。

3. 使用前的条件检查

- 函数在展开点具有所需阶数的导数或存在合法展开
- 各项使用一致的余项精度
- 余项阶数严格高于最终保留项

第一动作：先预判可能抵消的最低阶，再把所有相关项统一展开；逐阶合并系数，看到第一个非零合并项后才停止。

逐字话术：常数项被减掉，一次项也被减掉，所以我们至少要看到二次项。展开阶数是题目逼出来的，不是老师规定的。

4. 完整解题

1. 分子是加减结构，且常数项和一次项已经显式相消，不能只用 $e^x - 1 \sim x$ 。
2. 统一展开到二阶： $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ 。
3. 分子 $e^x - 1 - x = x^2/2 + o(x^2)$ 。
4. 除以 x^2 后得到 $1/2 + o(1)$ ，故极限为 $1/2$ 。

答案： $1/2$

5. 失效反例

反例题：能否在 $x=0$ 附近把 $|x|$ 写成一个普通 Taylor 多项式，再求双侧展开？

反例结论：不能。 $|x|$ 在 0 处不可导，左右一阶行为不同；必须分 $x>0$ 与 $x<0$ 讨论。

逐字话术：写完以后必须看余项。分母是 x^2 ，所以余项要比 x^2 更高阶， $o(x^2)$ 正好够用。

全程保留板书：先判抵消阶数；统一精度；首个非零项出现才停。

题卡状态： `math.limit-taylor-first-nonzero | ready-for-teacher-review | teacherApproved=false`

方法卡 03 | 递推式取极限之前先证明收敛

母题：设 $a_1=1$, $a_{(n+1)}=\sqrt{2+a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

1. 题干触发词

- $a_{(n+1)}=f(a_n)$
- 要求递推数列极限
- 固定点方程出现多个根

逐字话术：请把顺序写在草稿最上面：先证明收敛，后代入极限。解方程只是猜答案。

2. 可直接使用的二级结论

结论：固定点方程 $A=f(A)$ 只能给出可能的极限。只有先证明数列收敛，并确认 f 在候选点可以传递极限，才能用方程确定极限。

为什么成立：若 $a_n \rightarrow A$ 且 f 在 A 连续，则 $a_{(n+1)}=f(a_n) \rightarrow f(A)$ 。移位后的收敛数列极限仍为 A ，因此 $A=f(A)$ 。

3. 使用前的条件检查

- 已经证明数列收敛
- f 在候选极限处连续或具有保极限性质
- 候选根落在已证明的不变区间内

第一动作：先用归纳法建立不变区间，再证单调或压缩；确认收敛后令 $n \rightarrow \infty$ ，最后用区间排除多余固定点。

逐字话术：不变区间同时做两件事：给出上界，也帮助我们排除固定点方程中的多余根。

4. 完整解题

1. 猜候选：若极限存在，则 $A = \sqrt{2+A}$ ，解得 $A=2$ 或 $A=-1$ ；由根号值非负，保留 $A=2$ 。
2. 证不变区间： $a_1=1$ 。若 $1 \leq a_n < 2$ ，则 $1 < \sqrt{2+a_n} < 2$ ，故 $1 \leq a_{n+1} < 2$ 。
3. 证单调：在 $1 \leq a_n < 2$ 时， $a_{n+1} > a_n$ 等价于 $2+a_n > a_n^2$ ，即 $(2-a_n)(a_{n+1}) > 0$ 。
4. 因此数列单调递增且以 2 为上界，必收敛。再代入固定点方程，极限为 2。

答案： 2

5. 失效反例

反例题： 递推 $a_{n+1} = 1 - a_n$ 的固定点为 $1/2$ 。取 $a_1 = 0$ 时，数列是否趋于 $1/2$ ？

反例结论： 不趋于。数列为 $0, 1, 0, 1, \dots$ ，在两个值之间振荡。固定点方程只给候选，不能替代收敛证明。

逐字话术： 最后这道振荡反例一定要记住。它专门用来反驳‘有固定点就会收敛’。

全程保留板书： 候选值不等于极限：不变区间 $\rightarrow$ 单调/压缩 $\rightarrow$ 收敛 $\rightarrow$ 固定点。

题卡状态： `math.sequence-fixed-point-after-convergence | ready-for-teacher-review |`
`teacherApproved=false`

片尾收束逐字稿

老师说：今天三张卡请合成一条判断链：先看结构，再看抵消阶数；遇到递推，先证明收敛。

老师说：现在请关掉讲义，用60秒复述三条边界：等价无穷小为什么怕加减，Taylor为什么要统一余项，固定点方程为什么只是候选。

老师说：课后题不要求堆计算，每题第一行必须写触发词和条件。答案正确但方法入口错误，仍按方法错误订正。

课堂出口题与课后练习

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(5x)/\ln(1+2x)$ 。写出可使用等价无穷小的结构条件。
2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - x)/x^3$ 。说明必须展开到三阶的原因。
3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x - x^2/2)/x^3$ 。
4. 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ 。证明收敛并求极限。
5. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=1/a_n$ 。固定点候选为1，判断数列是否收敛。

答案与检查点

1. $5/2$ 。原式为纯商， $\sin(5x) \sim 5x$ 、 $\ln(1+2x) \sim 2x$ 。
2. $1/3$ 。 $\tan x = x + x^3/3 + o(x^3)$ ，一次项相消后首个非零项为三次项。
3. $1/6$ 。 e^x 统一展开到三阶，余项取 $o(x^3)$ 。
4. 极限 $\alpha = (1 + \sqrt{13})/2$ 。用 $[1, \alpha)$ 为不变区间，并证在此区间 $a_{n+1} > a_n$ 。
5. 不收敛。数列在2与1/2之间交替，固定点方程不能替代收敛证明。

教师发布前复核

- ☐ 逐题复算答案与符号，确认无口误。
- ☐ 逐条核对结论的成立条件，并在课件中保留条件页。
- ☐ 确认失效反例与结论边界一一对应。

- ☐ 确认学生版不含内部录制提示和未公开答疑信息。
- ☐ 在确认后更新数据库 teacherApproved 字段；本文件不会自动代签。

教师签字: _____

复核日期: _____

覆盖卡片: math.limit-equivalent-product-boundary、math.limit-taylor-first-nonzero、
math.sequence-fixed-point-after-convergence

资料来源

- legacy/ipad_site/lecture_notes/03_数学一逐章逐节完整讲义.md (函数、极限与连续)
- platform/src/data/generated/secondary-conclusions.json (3 张结构完整卡)
- output/teacher-course/2026-08-01-首讲备课包.md (当天授课节奏)