

数学一

极限渐近、Taylor 与递推数列

母题 → 触发词 → 二级结论 → 条件检查 → 完整解题 → 失效反例

100 分钟 · 3 个方法 · 课堂材料 (发布前请教师终审)

开场诊断 | 只写第一动作

01 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x)/(e^{2x}-1)$ 。

02 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x-1-x)/x^2$ 。

03 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

三类母题，三个方法入口

乘除极限

等价无穷小只在乘除主结构中优先替换

触发：0/0 型极限
第一动作：纯乘除逐因子替换；遇到加减先看抵消。

抵消极限

Taylor 展开必须保留到首个不抵消项

触发：分子或分母含多个加减项
第一动作：统一展开并逐阶合并，首个非零项出现才停。

递推数列

递推式取极限之前先证明收敛

触发： $a_{n+1}=f(a_n)$
第一动作：先证不变区间和单调，再取极限。

01

02

03

母题 | 等价无穷小只在乘除主结构中优先替换

母题

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x)/(e^{2x}-1)$ 。

题干触发词

- 0/0 型极限
- 可整理成若干乘除因子
- 出现 $\sin x$ 、 e^x-1 、 $\ln(1+x)$ 等标准小量

可直接使用的结论

同一趋近过程中，有限个等价无穷小的乘积或商仍可整体替换；加减式可能发生主项抵消，必须先合并或改用 Taylor 展开。

调用前必须检查

- 等价关系对应同一趋近点
- 分母在去心邻域内有意义
- 替换后不丢失抵消阶数

完整解题 | 乘除极限

答案: $3/2$

1

代入得 $0/0$; 分子、分母构成纯商, 满足等价替换的结构条件。

2

$x \rightarrow 0$ 时, $\sin(3x) \sim 3x$, $e^{2x}-1 \sim 2x$ 。

3

原式 $\sim 3x/(2x)=3/2$ 。

4

回查: 趋近点相同, 分母去心邻域内非零, 没有加减抵消。

失效边界 | 乘除极限

第一动作

先识别整体结构。乘除结构逐因子替换；看到加减或参数消项，就暂停替换并比较展开阶数。

板书口令

乘除可换；加减先看抵消；趋近点必须一致。

失效反例

为什么不能在 $1 - \cos x - x^2/2$ 中只用 $1 - \cos x \sim x^2/2$ 后就结束？

为什么失效

二阶主项完全抵消。 $1 - \cos x = x^2/2 - x^4/24 + o(x^4)$ ，所以原式 $= -x^4/24 + o(x^4)$ 。

母题 | Taylor 展开必须保留到首个不抵消项

母题

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2$ 。

题干触发词

- 分子或分母含多个加减项
- 含参数并要求极限存在或等于常数
- 常用等价后仍得到 $0/0$

可直接使用的结论

展开到哪一阶由合并后的第一个非零项决定。低阶系数尚未合并完，就不能停止。

调用前必须检查

- 函数在展开点具有合法展开
- 各项使用一致的余项精度
- 余项阶数严格高于最终保留项

完整解题 | 抵消极限

答案: $1/2$

1

分子是加减结构，常数项和一次项已显式相消，不能只用 $e^x - 1 \sim x$ 。

2

统一展开到二阶： $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ 。

3

分子 $e^x - 1 - x = x^2/2 + o(x^2)$ 。

4

除以 x^2 得 $1/2 + o(1)$ ，所以极限为 $1/2$ 。

失效边界 | 抵消极限

第一动作

先预判可能抵消的最低阶，再统一展开；逐阶合并系数，看到首个非零合并项后才停止。

板书口令

先判抵消阶数；统一精度；首个非零项出现才停。

失效反例

能否在 $x=0$ 附近把 $|x|$ 写成一个普通 Taylor 多项式，再求双侧展开？

为什么失效

不能。 $|x|$ 在 0 处不可导，左右一阶行为不同；必须分 $x>0$ 与 $x<0$ 讨论。

母题 | 递推式取极限之前先证明收敛

母题

设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

题干触发词

- $a_{n+1}=f(a_n)$
- 要求递推数列极限
- 固定点方程出现多个根

可直接使用的结论

固定点方程 $A=f(A)$ 只给候选；先证明数列收敛，才能用方程确定极限。

调用前必须检查

- 已经证明数列收敛
- f 在候选极限处连续
- 候选根落在已证不变区间内

完整解题 | 递推数列

答案：2

1

若极限存在，则 $A = \sqrt{2+A}$ ，候选为 2、-1；根号值非负，保留 2。

2

若 $1 \leq a_n < 2$ ，则 $1 < \sqrt{2+a_n} < 2$ ，故区间 $[1, 2)$ 不变。

3

在该区间， $a_{n+1} > a_n$ 等价于 $(2-a_n)(a_n+1) > 0$ 。

4

数列递增且被 2 控制，因此收敛；再代入固定点方程，极限为 2。

失效边界 | 递推数列

第一动作

先用归纳法建立不变区间，再证单调或压缩；确认收敛后取极限，最后用区间排除多余固定点。

板书口令

不变区间 $\rightarrow$ 单调/压缩 $\rightarrow$ 收敛 $\rightarrow$ 固定点。

失效反例

$a_{n+1}=1-a_n$ 的固定点为 $1/2$ 。取 $a_1=0$ 时，数列是否趋于 $1/2$ ？

为什么失效

不趋于。数列为 $0, 1, 0, 1, \dots$ 。固定点方程只给候选，不能替代收敛证明。

开场诊断答案 | 先核入口，再核结果

01 乘除极限
3/2

02 抵消极限
1/2

03 递推数列
2

课后只交四行

触发词 + 条件检查

第一动作 + 结果自检

只写最终答案，不计为完成。