2012 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=1$,得 $y=1$ 为曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$,得 $x=1$ 为曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线;

显然 $x=-1$ 不是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线,且曲线没有斜渐近线,

故曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有两条渐近线,应选(C).

方法点评:本题考查曲线的渐近线.渐近线是基础而频繁的考点,需要熟练掌握其求法.曲线的渐近线共有三种,即水平渐近线、铅直渐近线和斜渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线;

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,则 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线;

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(\neq0,\infty)$,$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$,则 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

(2)【答案】 (A).

【解】 **方法一** 由

$$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+2(e^x-1)e^{2x}(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots+$$
$$n(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{(n-1)x}-n+1)e^{nx},$$

得 $f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$,

应选(A).

方法二 由导数的定义,得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

应选(A).

(3)【答案】 (B).

【解】 **方法一** 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,得 $f(0,0)=0$.

取 $y=0$,由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$ 存在,得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,

即 $f'_x(0,0)=0$,同理 $f'_y(0,0)=0$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\Delta z-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,得

$\Delta z - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，应选(B).

方法二 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，得 $f(0,0)=0$.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，设 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$，则 $\Delta z = f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho)$，由可微的定义得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，应选(B).

方法三 取 $f(x,y)=|x|+|y|$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 x 不可偏导，由对称性，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 y 也不可偏导，于是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微，(A) 不对；

取 $f(x,y)=x$，显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 不存在，(C) 不对；

取 $f(x,y)=xy$，因为 $f(x,y)$ 连续可偏导，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 不存在，(D) 不对，应选(B).

方法点评：本题考查二元函数可微的判断. 判断二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微一般有如下几个方法：

(1) 若 $f(x,y)$ 连续可偏导，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微；

(2) 若 $\Delta z = f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微；

(3) 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\rho}=0,$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

(4)【答案】 (D).

【解】 由 $I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx<0$，得 $I_1>I_2$；

由 $I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx>0$，得 $I_2<I_3$；

$$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx,$$

而 $\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx \xlongequal{x-\pi=t}\int_{\pi}^{2\pi} e^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)\,dt=-\int_{\pi}^{2\pi} e^{(x+\pi)^2}\sin x\,dx$，

由 $I_3-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}[e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}]\sin x\,dx>0$，得 $I_1<I_3$，于是 $I_2<I_1<I_3$，应选(D).

(5)【答案】 (C).

【解】 **方法一** $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3+c_4\end{pmatrix}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 成比例,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,应选(C).

方法二 因为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,应选(C).

(6)【答案】 (B).

【解】 由 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

应选(B).

(7)【答案】 (A).

【解】 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\0, & x\leqslant 0;\end{cases}$

Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

因为 X,Y 独立,所以 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-(x+4y)}, & x>0,y>0,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

于是 $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$,

应选(A).

(8)【答案】 (D).

【解】 **方法一** 设两段长度分别为 X,Y,则 $X+Y=1$ 或 $Y=-X+1$.

由 $P\{Y=-X+1\}=1$,得 $\rho_{XY}=-1$,应选(D).

方法二

设两段长度为 X,Y,则 $X\sim U(0,1)$,且 $Y=-X+1$.

由 $X\sim U(0,1)$ 得 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$E(X)=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad E(Y)=E(-X+1)=-E(X)+1=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=E[X(-X+1)]=-E(X^2)+E(X)=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{12}$;

由 $E(X^2)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ 得 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$,

$D(Y)=D(-X+1)=D(X)=\frac{1}{12}$,则 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-1$,应选(D).

方法点评:本题考查两个随机变量的相关系数.相关系数的计算公式为 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$,注意以下两个结论:

(1)$\rho_{XY}=-1$ 的充分必要条件为 $P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$;

(2)$\rho_{XY}=1$ 的充分必要条件为 $P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$.

二、填空题

(9)【答案】 e^x.

【解】 由观察知 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 的一特解为 $f(x)=\mathrm{e}^x$,

将其代入 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 中满足,故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

(10)【答案】 $\frac{\pi}{2}$.

【解】
$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^2[(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)\\&=\int_{-1}^1(x+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

方法点评:本题考查定积分的计算.当积分表达式中出现根号,且根号内为二次多项式,一般采用配方法,再换元.需要注意如下几个结论:

(1)$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$;

(2)含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的积分,注意使用三角代换 $x=a\sin t$.

特别地,根据定积分的几何意义有 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}a^2$.

(11)【答案】 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

【解】 令 $f(x,y,z)=xy+\frac{z}{y}$,

$$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=\left\{y,x-\frac{z}{y^2},\frac{1}{y}\right\},$$

于是 $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

(12)【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【解】 令 $\Sigma:z=1-x-y\ ((x,y)\in D)$,其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,

则 $\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\iint_D y^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{3}\iint_D y^2\,dx\,dy=\sqrt{3}\int_0^1 y^2\,dy\int_0^{1-y}dx=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)\,dy=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

(13)【答案】 2.

【解】 方法一 取 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2.

方法二 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant 3$.

又由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{E})=3$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3$.

而 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})=1$，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2$.

方法点评：本题考查矩阵的秩.

研究由向量乘法形成的矩阵的秩时，通常使用矩阵的幂阵，本题很容易想到计算 $\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系. 另外注意本题 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 与具体的 $\boldsymbol{\alpha}$ 无关，可以采用举例法.

(14)【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解】 因为 A，C 互不相容，所以

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题

(15)【证明】 方法一 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\frac{x^2}{2}-1$，

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,\quad f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-1-\cos x.$$

当 $-1<x<1$ 时，因为 $\frac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$，$1+\cos x\leqslant 2$，所以 $f''(x)>0$.

又因为 $f'(0)=0$，所以 $\begin{cases}f'(x)<0, & -1<x<0,\\ f'(x)>0, & 0<x<1,\end{cases}$ 于是 $x=0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值点，而 $f(0)=0$，故当 $-1<x<1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$.

方法二 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\frac{x^2}{2}-1$，$f(0)=0$.

因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，只需要研究 $[0,1)$ 内的情形.

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1,\quad f''(0)=2,$$

$$f'''(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x>0,$$

由 $\begin{cases}f''(0)=2,\\ f'''(x)>0(0<x<1),\end{cases}$ 得 $f''(x)>2>0(0<x<1)$；

再由$\begin{cases} f'(0)=0, \\ f''(x)>0(0<x<1), \end{cases}$得 $f'(x)>0(0<x<1)$;

由$\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(x)>0(0<x<1), \end{cases}$得 $f(x)>0(0<x<1)$,

故当 $-1<x<1$ 时,$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.

方法点评:证明函数不等式是重要考查点,一般采用单调性进行证明,根据导数或高阶导数符号最终确定函数的单调性,根据函数在某一点的符号情况得到所证的不等式.

(16)【解】 令$\begin{cases} f'_x=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0, \\ f'_y=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0, \end{cases}$得$\begin{cases} x=1, \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$

$$f''_{xx}=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad f''_{xy}=y(x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad f''_{yy}=x(y^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

当$(x,y)=(1,0)$ 时,

$$A=f''_{xx}(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\quad B=f''_{xy}(1,0)=0,\quad C=f''_{yy}(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

由 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$,得$(1,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值点,极大值为 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$;

当$(x,y)=(-1,0)$ 时,

$$A=f''_{xx}(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\quad B=f''_{xy}(-1,0)=0,\quad C=f''_{yy}(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

由 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$ 得$(-1,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(17)【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$,得级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}(\pm1)^{2n}\neq 0$,得 $x=\pm1$ 时级数发散,故幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$,

而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)'=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}(-1<x<1)$,

令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$,$S_1(0)=1$,

当 $0<|x|<1$ 时,$S_1(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=\dfrac{1}{x}\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

于是 $S(x)=\begin{cases} 3, & x=0, \\ \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1. \end{cases}$

(18)【解】 曲线 L 的切线的斜率为 $k=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\dfrac{\sin t}{f'(t)}$，切线方程为

$$y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}[x-f(t)].$$

令 $y=0$，得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x=f(t)+\dfrac{\cos t}{\sin t}f'(t)$，由题意得

$$\cot^2 t\cdot f'^2(t)+\cos^2 t=1,$$

因为 $f'(t)>0$，所以 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\sec t-\cos t$，

于是 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+C$，

再由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$.

由 $f(0)=0$，$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}f(t)=+\infty$ 得曲线 L 及 x 轴及 y 轴围成的无界区域的面积为

$$A=\int_0^{+\infty}y\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

(19)【解】 补充 $L_0:x=0$（起点 $y=2$，终点 $y=0$），记 L 与 L_0 围成的区域为 D，由格林公式得

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L+L_0}3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\,\mathrm{d}y-\int_{L_0}3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma-\int_2^0-2y\,\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_0^2 2y\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-4.\end{aligned}$$

(20)【解】 (Ⅰ) 由行列式按行或列展开的性质得

$$|\boldsymbol{A}|=1\times A_{11}+a\cdot A_{41}=M_{11}-aM_{41}=1-a^4.$$

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无数个解，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $a=-1$ 或 $a=1$.

当 $a=-1$ 时，$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<4$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无数个解，通解为

$$\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}(C\text{ 为任意常数});$$

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

方法点评：行列式虽然不是考查的重点内容，但有几种特殊行列式需要熟练掌握其计算方法：

(1) 三对角行列式，如本题矩阵对应的行列式，这种行列式的计算一般采用行列式按行或列的方法展开计算或找递推关系.

(2) 对称矩阵对应的行列式，一般采用所有行加到第一行，提取公因子，再将行列式上(下)三角化计算.

非齐次线性方程组解的讨论，首先运用方程组解的理论确定解的存在性，然后利用初等行变换求方程组通解，这个方法一定要反复练习，熟能生巧.

(21)【解】 (Ⅰ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-1-a\end{pmatrix}$,

由 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$ 及 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ 得 $a=-1$.

(Ⅱ) 当 $a=-1$ 时，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_2=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_3=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下，二次型 f 的标准形为

$$f=2y_2^2+6y_3^2.$$

方法点评：本题综合考查了矩阵的性质、特征值与特征向量理论、正交变换法化二次型为标准形等重要知识点，综合性高、覆盖面广，且涉及的都是线性代数的重点内容，需要熟练掌握所涉及知识的理论体系的方法体系.

在解读条件 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$ 时，一般做法是，先进行矩阵的乘法，再阶梯化，根据矩阵的秩求出 a，但这样做比较费时，如果想到性质 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，则本题运算量会大幅下降，所以熟练掌握线性代数有关方法对解题非常重要.

(22)【解】 (Ⅰ)$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{1}{4}$.

(Ⅱ) 由(X,Y) 的联合分布律得 X,Y,XY 的分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{pmatrix},$$

于是 $E(X)=\dfrac{2}{3},E(Y)=1,E(Y^2)=\dfrac{5}{3},D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\dfrac{2}{3},E(XY)=\dfrac{2}{3}$,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$$

故 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\dfrac{2}{3}$.

(23)【解】 (Ⅰ) 因为 X,Y 相互独立，所以 $Z=X-Y$ 服从正态分布.

因为 $E(Z)=E(X)-E(Y)=0,D(Z)=D(X)+D(Y)=3\sigma^2$，所以 $Z\sim N(0,3\sigma^2)$，故 Z 的密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}(-\infty<z<+\infty).$$

(Ⅱ) 似然函数为 $L=f(z_1)f(z_2)\cdots f(z_n)=(6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$，

取对数得 $\ln L=-\dfrac{n}{2}\ln 6\pi-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$，

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sigma^2)}\ln L=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{6\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2=0$，得 $\sigma^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2$.

(Ⅲ) 因为 $E(\hat{\sigma}^2)=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(Z_i^2)=\dfrac{1}{3}E(Z^2)=\dfrac{1}{3}[D(Z)+(E(Z))^2]=\sigma^2$，

所以 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.