2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）

（A）$f(1)=0$.　　（B）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

（C）$f'(1)=1$.　　（D）$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$.

（2）已知 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可导，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则（　　）

（A）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$.　　（B）$f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

（C）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$.　　（D）$f(1)=0,f'(1)=1$.

（3）设有数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 满足 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

（4）已知 $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_2<I_1<I_3$.

（C）$I_1<I_3<I_2$.　　（D）$I_3<I_2<I_1$.

（5）下列 4 个条件中，3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化的一个充分但不必要条件为（　　）

（A）$\boldsymbol{A}$ 有 3 个不相等的特征值.

（B）$\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

（C）$\boldsymbol{A}$ 有 3 个两两线性无关的特征向量.

（D）$\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

新东方大学生学习与发展中心

（6）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则（　　）

（A）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

（B）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

（C）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

（D）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

（7）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 λ 可取（　　）

（A）$\{0,1\}$.　　（B）$\{\lambda\,|\,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-2\}$.

（C）$\{\lambda\,|\,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.　　（D）$\{\lambda\,|\,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1\}$.

（8）设随机变量 $X\sim U(0,3)$，随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布，且 X 与 Y 协方差为 -1，则 $D(2X-Y+1)=$（　　）

（A）1.　　（B）5.　　（C）9.　　（D）12.

（9）设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布,且 X_1 的 4 阶矩存在.设 $\mu_k=E(X_1^k),k=1,2,3,4$,则由切比雪夫不等式,对于任意的 $\varepsilon>0$,有

$P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$（　　）

（A）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$.　　（B）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

（C）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$.　　（D）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

（10）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，在 $X=x$ 条件下随机变量 $Y\sim N(x,1)$，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

新东方大学生学习与发展中心

（A）$\frac{1}{4}$.　　（B）$\frac{1}{2}$.

（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在点 $(0,1)$ 的最大方向导数为_____.

（12）$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$_____.

（13）当 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 时，$x^2+y^2\leqslant k\mathrm{e}^{x+y}$ 恒成立，则 k 的取值范围是_____.

（14）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$，则 $a=$_____.

（15）已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$_____.

（16）设 A,B,C 随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立.若 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(B\cup C\middle| A\cup B\cup C\right)=$_____.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 的满足 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

（18）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算 $I=\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（19）（本题满分 12 分）

L 是曲面 Σ：$4x^2+y^2+z^2=1$，$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界，曲面方向朝上，已知曲线 L 的方向和曲面的方向符合右手法则，求 $I=\oint_L\left(yz^2-\cos z\right)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+\left(2xyz+x\sin z\right)\mathrm{d}z$

（20）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geqslant 0$ 的充要条件为对不同实数 a,b $f(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

（21）（本题满分 12 分）

新东方大学生学习与发展中心

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ij\cdot x_ix_j$.

（1）写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵；

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$,将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（3）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

（22）（本题满分 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

新东方大学生学习与发展中心