2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）

（A）$f(1)=0$．　　（B）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$．

（C）$f'(1)=1$．　　（D）$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$．

【答案】（B）．

【解析】

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)}{\ln x}\cdot\ln x\right]=0$，（B）正确，但 $f(x)$ 连续性未知，故 $f(1)$ 未知，其他三项均错．

（2）已知 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可导，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则（　　）

（A）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$．

（B）$f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$．

（C）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$．

（D）$f(1)=0,f'(1)=1$．

【答案】（B）．

【解析】$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\left[yf\left(\dfrac{y}{x}\right)+xyf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\right]+y\left[xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+xyf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{1}{x}\right]$

$=2xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)=y^2\ln\dfrac{y}{x}\Rightarrow f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{y}{2x}\ln\dfrac{y}{x}\Rightarrow f(u)=\dfrac{1}{2}u\ln u,$

$\therefore f(1)=0,f'(1)=\left(\dfrac{1}{2}\ln u+\dfrac{1}{2}\right)\Big|_{u=1}=\dfrac{1}{2}$，选（B）．

（3）设有数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 满足 $-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．

新东方大学生学习与发展中心

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

【答案】（D）.

【解析】取 $x_n=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$，则（A）、（B）、（C）均错， 且（D）的“ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在”是正确的；（D）的“ $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在”的原因：当 $-\dfrac{\pi}{2}$ 剟 x_n $\dfrac{\pi}{2}$ 时，0 剟 $\cos x_n$ 1，而 $\sin x$ 在 $[0,1]$ 上单调，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在.

（4）已知 $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$， $I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$， $I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则（ ）

（A） $I_1<I_2<I_3$.

（B） $I_2<I_1<I_3$.

（C） $I_1<I_3<I_2$.

（D） $I_3<I_2<I_1$.

【答案】（A）.

【解析】令 $f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln(1+x)$，$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x-1}{2(1+x)}$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，当 $0<x<1$ 时 $f(x)<f(0)=0$，所以 $\dfrac{x}{2}<\ln(1+x)$，

$\dfrac{x}{2(1+\cos x)}<\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}$， $I_1<I_2$；又 0 剟 x 1 时，

$\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}$ 剟 $\dfrac{x}{1+\cos x}<\dfrac{x}{1}$ $\dfrac{x}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin x}=\dfrac{2x}{1+\sin x}$，故 $I_2<I_3$，选（A）.

（5） 下列 4 个条件中，3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化的一个充分但不必要条件为( )

（A） $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不相等的特征值.

（B） $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

（C） $\boldsymbol{A}$ 有 3 个两两线性无关的特征向量.

（D） $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

【答案】（A）.

【解析】

浙东方大学生学习与发展中心

选项（A）：$\boldsymbol{A}$ 有 3 个互不相同特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，但是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，$\boldsymbol{A}$ 的特征值可能有重根，正确;
选项（B）：$\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件;
选项（C）：3 个特征向量两两线性无关，不能保证整体线性无关，故不能推出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;
选项（D）：实对称矩阵不同特征值的特征向量正交，可对角化的矩阵不一定是实对称矩阵.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则(　　)

（A）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

（B）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

（C）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

（D）方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

【答案】(C).
【解析】

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{Bx}=0$ 同解，则 $\boldsymbol{r(A)}=\boldsymbol{r(B)}=\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 行向量组等价.

由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 行 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 行 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$，

则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 同解，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 同解，

令 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 维向量，

则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{Ay}_1=0\\ \boldsymbol{By}_2=0\end{cases}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{By}_1=0\\ \boldsymbol{Ay}_2=0\end{cases}$.

由 $\boldsymbol{Ay}_1=0,\boldsymbol{By}_1=0$ 同解，$\boldsymbol{Ay}_2=0,\boldsymbol{By}_2=0$ 通解，故 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 同解.

故选(C).

新东方大学生学习与发展中心

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 λ 可取（　　）

（A）$\{0,1\}$.

（B）$\{\lambda\,|\,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-2\}$.

（C）$\{\lambda\,|\,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.

（D）$\{\lambda\,|\,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1\}$.

【答案】(C).

【解析】

记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$,

由 $|\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,|\boldsymbol{B}|=(\lambda^2-1)^2$,

当 $\lambda\neq-2,\lambda\neq\pm1$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0,|\boldsymbol{B}|\neq0$，即 $\boldsymbol{r(A)=r(B)=3}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 $\boldsymbol{R}^3$ 的基，故等价;

当 $\lambda=-1$ 时，$\boldsymbol{r(A)=3,r(B)<3}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 不等价;

当 $\lambda=-2$ 时，$\boldsymbol{r(A)<3,r(B)=3}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 不等价;

当 $\lambda=1$ 时，$\boldsymbol{r(A)=r(B)=r(A,B)=1}$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价；故选(C).

(8) 设随机变量 $X\sim U(0,3)$，随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布，且 X 与 Y 协方差为 -1，则 $D(2X-Y+1)=$（　）

（A）1.　　（B）5.　　（C）9.　　（D）12.

【答案】（C）.

【解析】$D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)$

由 $X\sim U(0,3)$，$D(X)=\dfrac{(3-0)^2}{12}=\dfrac{3}{4}$；

$Y\sim P(2)$，$D(Y)=2$

所以 $D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)=9$，选（C）.

（9）设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布,且 X_1 的 4 阶矩存在.设

$\mu_k=E(X_1^k),k=1,2,3,4$,则由切比雪夫不等式,对于任意的 $\varepsilon>0$,有

$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}$ （　　）

（A）$\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$.　　（B）$\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

（C）$\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$.　　（D）$\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

【答案】（A）.

【解析】记$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=Y$，显然可得$E(Y)=\mu_2$；则$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}$ $\frac{D(Y)}{\varepsilon^2}$；

又

$$D(Y)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}D(X_1^2)=\frac{1}{n}[E(X_1^4)-E^2(X_1^2)]=\frac{1}{n}(\mu_4-\mu_2^2)$$

所以$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}$ $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$，选（A）.

(10)设随机变量$X\sim N(0,1)$，在$X=x$条件下随机变量$Y\sim N(x,1)$，则X与Y的相关系数为（　）

（A）$\frac{1}{4}$.　　（B）$\frac{1}{2}$.

（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】（D）.

【解析】由题意$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

且$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}},-\infty<y<+\infty,$

所以$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty$

又$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}\mathrm{d}y$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1$

又因为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2+2x^2-2xy}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2-xy)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\frac{y}{2})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}},-\infty<y<+\infty$$

故$Y\sim N(0,2),D(Y)=2$；

所以

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1-0}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$，选（D）.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) 函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在点$(0,1)$的最大方向导数为_____.

【答案】4.

【解析】$f(x,y)$在某一点处的最大方向导数是其梯度的模，

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\left.2x\right|_{(0,1)}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\left.4y\right|_{(0,1)}=4$，所以最大的方向导数$\sqrt{0^2+4^2}=4$.

(12) $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$_____.

【答案】4.

【解析】$\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\sqrt{x}=t}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t^2}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t$$

$$=4\int_1^{\mathrm{e}}\ln t\mathrm{d}t$$

$$=4(t\ln t-t)\Big|_1^{\mathrm{e}}$$

$$=4$$

(13) 当x厖$0,y$　0时，x^2+y^2,, $k\mathrm{e}^{x+y}$恒成立，则k的取值范围是_____.

【答案】$\left[4\mathrm{e}^{-2},+\infty\right)$.

【解析】原不等式即k厖$(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)},x$　$0,y?$ $0,$

新东方大学生学习与发展中心

令 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$，$x\geq 0, y\geq 0$，

当 $x>0, y>0$ 时，直接求驻点，

$f_x'=(2x-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0$，$f_y'=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0$，

解得 $x=y=1$，且 $f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$.

当 $x=0$ 时，$f(0,y)=y^2\mathrm{e}^{-y}=g(y)$，

$g'(y)=2y\mathrm{e}^{-y}-y^2\mathrm{e}^{-y}=0, y=0$ 或 2，

且 $g(0)=0, g(2)=4\mathrm{e}^{-2}$.

当 $y=0$ 时，同理解得 $f(0,0)=0, f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}$.

比较可得，$f(x,y)$ 的最大值为 $f(0,2)=f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}$.

于是 $k\geq 4\mathrm{e}^{-2}$.

(14) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$，则 $a=$_____.

【答案】-1.

【解析】令 $t=\mathrm{e}^{-x}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}t^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}t^n$ 的收敛区间为 $-\mathrm{e}<t<\mathrm{e}$，

那么 $-\mathrm{e}<\mathrm{e}^{-x}<\mathrm{e}$，解得 $x>-1$，于是 $a=-1$.

(15) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$_____.

【答案】$-\boldsymbol{E}$.

【解析】由 $(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\Rightarrow -\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}.$$

(16) 设 A,B,C 随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立.若 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P\left(B\cup C\middle| A\cup B\cup C\right)=$_____

【答案】$\frac{5}{8}$.

【解析】因为 B 与 C 相互独立，有 $P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

又因 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容,有

$P(AB)=P(AC)=P(ABC)=0$.

$$P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=\frac{P[(B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)]}{P(A\cup B\cup C)}=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-\frac{1}{9}-0+0}=\frac{5}{8}.$$

三、解答题：17～22 小题, 共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 的满足 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

【答案】斜渐近线 $y=2x$.

【解析】$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}\left[\int\left(2+\sqrt{x}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=2x+C\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

将 $y(1)=3$ 代入可得 $C=\mathrm{e}$，即 $y=2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}\ (x>0)$.

由函数解析式可知，曲线没有垂直渐近线；

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}\right)=+\infty$，

曲线没有水平渐近线；

又 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y(x)-kx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}-2x\right)=0$，

故曲线有斜渐近线 $y=2x$.

(18)(本题满分 12 分)

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| y-2 \text{烫} x \quad \sqrt{4-y^2}, 0 \text{烫} y \quad 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】$2(\pi-1)$.

【解析】将积分区域 D 分为两部分 $D=D_1+D_2$，其中：

$D_1=\{(x,y)\middle| y \text{烫} x+2,-2 \quad x \text{烫} 0,0 \quad y ? \ 2\}$，$D_2=\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \text{剥} 4, x \quad 0, y ? \ 0\}$，

故 $I=\iint\limits_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{记}{=} I_1+I_2$.

其中：

$$I_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}} r\cdot(\cos\theta-\sin\theta)^2\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta-\sin\theta)^2\cdot\frac{2}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\pi,$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\cdot(\cos\theta-\sin\theta)^2\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi-2 \text{---}$$

故：$I=\pi-2+\pi=2(\pi-1)$.

(19)(本题满分 12 分)

L 是曲面 Σ：$4x^2+y^2+z^2=1$，$x \text{厦} 0, y \quad 0, z ? \ 0$ 的边界，曲面方向朝上，已知曲线 L 的方向和曲面的方向符合右手法则，求 $I=\oint\limits_L\left(yz^2-\cos z\right)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+\left(2xyz+x\sin z\right)\mathrm{d}z$

【答案】0.

【解析】由斯托克斯公式可得：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2-\cos z & 2xz^2 & 2xyz+x\sin z \end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

令 Σ_1：$4x^2+y^2 \text{,,} 1, x \text{厦} 0, y \quad 0$，指向 z 轴负向，

Σ_2：$4x^2+z^2 \text{,,} 1, x \text{厦} 0, z \quad 0$，指向 y 轴负向，

Σ_3：$y^2+z^2 \text{,,} 1, y \text{厦} 0, z \quad 0$，指向 x 轴负向，

则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$

$-\iint\limits_{\Sigma_2}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\iint\limits_{\Sigma_3}\left(-2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$

$=\iiint\limits_{\Omega}(2z-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0-0-0=0$.

(20) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$ 的充要条件为对不同实数 a,b $f(\frac{a+b}{2})\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

【证明】$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$，$\xi$ 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]dx$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]dx$$

必要性：若 $f''(x)\geq 0$，则 $f''(\xi)\geq 0$，有 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}\geq f(\frac{a+b}{2})$.

充分性：若存在 x_0 使得 $f''(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 有二阶连续导数，故存在 $\delta>0$ 使得 $f''(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 内恒小于零，记 $a=x_0-\delta,b=x_0+\delta$，

此时 $\int_a^b f(x)dx=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]dx$

$<f(\frac{a+b}{2})(b-a)$，矛盾！故 $f''(x)\geq 0$.

综上，充分性必要性均得证.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ij\cdot x_ix_j$.

（1）写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵；

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（3）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

【答案】（1）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$;

（2）令正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$，利用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$,化为标准形

$f=14y_3^2$；

（3）$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$，（$c_1,c_2$ 为任意常数）

【解析】（1）$f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}ij\cdot x_ix_j$

$=x_1^2+2x_1x_2+3x_1x_3+2x_2x_1+4x_2^2+6x_2x_3+3x_3x_1+6x_3x_2+9x_3^2$

$=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$

$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

（2）$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-4&-6\\-3&-6&\lambda-9\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-14)=0$

得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$;

$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$;

$14\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$,解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 进行施密特正交化可得 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$;

新东方大学生学习与发展中心

将$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$单位化,可得$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\ -\frac{6}{\sqrt{70}}\\ \frac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$,

令正交矩阵$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$,

利用正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形$f=14y_3^2$;

（3）令$f(x_1,x_2,x_3)=14y_3^2=0$，则$\begin{cases}y_1=k_1\\ y_2=k_2\\ y_3=0\end{cases}$，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=k_1\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\ -\frac{6}{\sqrt{70}}\\ \frac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\ -6\\ 5\end{pmatrix}$$，（c_1,c_2为任意常数）

(22)(本题满分 12 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自均值为θ的指数分布总体的简单随机样本，设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$来自均值为2θ的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$为未知数，利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D(\hat{\theta})$.

【答案】

新东方大学生学习与发展中心

（1）$\hat{\theta}=\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j}{2(m+n)}=\dfrac{2n\bar{X}+m\bar{Y}}{2(m+n)}$；

（2）$\dfrac{\theta^2}{m+n}$.

【解析】

（1）由题意知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的总体 X 服从 $E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 的总体 Y 服从 $E\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)$，

从而 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，$Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\theta}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

构造最大似然函数为 $L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot\dfrac{1}{(2\theta)^m}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}$，

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-m\ln(2\theta)-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{m}y_j$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{m}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{j=1}^{m}y_j=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j}{2(m+n)}=\frac{2n\bar{X}+m\bar{Y}}{2(m+n)}$$

（2）$D(\hat{\theta})=D\left[\dfrac{2n\bar{X}+m\bar{Y}}{2(m+n)}\right]=\dfrac{1}{4(m+n)^2}D(2n\bar{X}+m\bar{Y})$；

$$=\frac{1}{4(m+n)^2}\left[4n^2D(\bar{X})+m^2D(\bar{Y})\right]=\frac{1}{4(m+n)^2}\left[4n^2\cdot\frac{\theta^2}{n}+m^2\cdot\frac{4\theta^2}{m}\right]=\frac{\theta^2}{m+n}$$

新东方大学生学习与发展中心